East Asian Math. J.
Vol. 32 (2016), No. 4, pp. 565-587
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2016.039

초등수학영재의 분수 나눗셈의 이해에 관한 연구

A Study on Understanding of Fraction Division of Elementary Mathematical Gifted Students

김 영 아 · 김 동 화[1] · 노 지 화

ABSTRACT. The purpose of this study was to analyze the understanding of the meaning of fraction division and fraction division algorithm of elementary mathematical gifted students through the process of problem posing and solving activities. For this goal, students were asked to pose more than two real-world problems with respect to the fraction division of $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$, and to explain the validity of the operation $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}$ in the process of solving the posed problems. As the results, although the gifted students posed more word problems in the 'inverse of multiplication' and 'inverse of a cartesian product' situations compared to the general students and pre-service elementary teachers in the previous researches, most of them also preferred to understanding the meaning of fractional division in the 'measurement division' situation. Handling the fractional division by converting it into the division of natural numbers through reduction to a common denominator in the 'measurement division', they showed the poor understanding of the meaning of multiplication by the reciprocal of divisor in the fraction division algorithm. So we suggest following: First, instruction on fraction division based on various problem situations is necessary. Second, eliciting fractional division algorithm in partitive division situation is strongly recommended for helping students understand the meaning of the reciprocal of divisor. Third, it is necessary to incorporate real-world problem posing tasks into elementary mathematics classroom for fostering mathematical creativity as well as problem solving ability.

---

1) 교신저자

Received July 27, 2016; Revised August 26, 2016; Accepted August 31, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification: 97D40
Key Words: The meaning of fraction division, Fraction division algorithm, Problem posing.

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

분수의 개념 및 계산 알고리즘의 유의미한 이해는 수학의 활용과 문제 해결에 있어서 중요한 부분이다(교육부, 2015). 그러나 실생활 맥락에서 분수 나눗셈을 활용하는 경우를 찾기 어려워 학교 수학에서 분수 나눗셈 학습은 문제 상황에 기반을 두기 보다는 형식화된 알고리즘에 의존하고 있는 실정이다. 이에 따라 학생들은 분수의 나눗셈을 특정 상황과 연결 지어 이해하기 보다는 단순히 분수를 역수화하여 곱하는 계산 절차를 분수의 나눗셈의 의미로 이해하고 있다(김경미 · 황우형, 2011). 곧, 분수 알고리즘 학습은 단순히 '역수를 곱하는 것'으로 암기한 채 계산 기능을 숙달하는 것에 머물고 있는 것이다. 또한 예비 교사를 대상으로 한 연구에서도 예비 교사들 역시 분수 나눗셈의 의미에 대한 이해가 부족하고, 분수 나눗셈 알고리즘에서 제수의 역수를 곱한다는 것에 대해 이해하지 못하고 있다(서관석 외, 2002; 박교식 외, 2004; 방정숙 외, 2008). 이렇듯 분수 나눗셈의 의미를 이해하고 그것의 알고리즘을 의미 있게 해석하는 것은 학생과 교사 모두에게 상당히 도전적인 과제라고 할 수 있다.

예비교사와 일반학생을 대상으로 한 분수 나눗셈 의미 이해와 분수 나눗셈 알고리즘 이해에 대한 연구들을 살펴보면, 서관석 외(2002)는 초등 예비 교사 를 대상으로 하여 분수 나누기에 대한 내용적 지식(SMK)과 교수학적 내용 지식(PCK)을 분석한 결과, 예비 교사는 분수 나눗셈에 적합한 상황 설명에 어려움을 보였으며, 개념적 이해가 부족한 상태에서 알고리즘에 대한 의존성이 매우 심각함을 알 수 있었다. 박교식 외(2004)는 우리나라 예비 초등 교사들이 $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$에 적합한 문장제를 만들 때 나타나는 오류 유형과 만든 문장제의 유형을 분석한 결과, 예비 초등 교사 48명 중 32명이 한 개 이상의 잘못된 문장제를 제시하였고, 올바른 문장제 중 약 90%가 포함제였으며, 개념적으로 옳게 만든 문제라도 대부분은 실제 문제 상황의 해(자연수)와 계산 결과(분수)가 일치하지 않는 문제점을 나타냈다. 방정숙 외(2008)는 우리나라 초등 예비 교사 4학년 291명을 대상으로 분수의 나눗셈을 중심으로 내용 지식과 교수 내용 지식을 상세히 분석한 결과, 예비교사는 분수 나눗셈에 대한 내용 지식 측면에서 단순한 계산 문제, 문장제, 연산감각 측면에서 높은 정답율을 보인 반면, 분수 나눗셈의 기본적인 의미에 대한 이해는 부족한 것으로 나타났다. 분수의 전형적인 알고리즘에 대한 설명에서 68%의 예비교사들만이 계산 과정에서 왜 제수의 역수를 취해 곱하는 형태가 되는지 설명할 수 있었다.

강영란 외(2012)는 분수 나눗셈에 대해 초등 6학년 학생들이 적합한 문장제를

만들게 하고 학생들이 제시한 문장제에 대해 교사들이 평가하고 오류에 대한 첨삭을 하는 과정을 통해 6학년 초등교사의 전문화된 내용 지식(SCK)를 분석하였다. 학생들이 만든 문장제는 포함제에 해당하는 문항수가 가장 많았으며 나머지는 카테시안 곱의 역 문제였고, 등분제, 곱셈의 역 문제는 없어, 수학적 사고의 다양성을 위해 단원 전반에 걸쳐 다양한 맥락의 문제 상황이 제시될 필요가 있음을 주장하였다. 초등 교사들은 학생들의 오류를 수정하는 과정에서 (분수)÷(분수) 상황에 대하여 자연수 나눗셈의 포함제 구조를 분수 나눗셈의 포함제 구조로 확장하여 포함제를 만들고 있지만, 몫이 이산량으로 주어지는 경우 그것이 자연수이어야 한다는 것을 간과하고 있어 개념적으로 옳으나 해의 분수 표현이 실제 상황의 답(자연수)과 그대로 일치하지 않는 것이었다. 학생이 등분제 상황으로 만든 문항의 오류에 대해 모두 포함제 형태로 수정하는 것으로 보아 (분수)÷(분수)에 대한 등분제 형태의 문제 진술 및 두 연산간의 공통점과 차이점을 명확하게 인지할 수 있도록 해야 함을 지적하였다. 방정숙 외(2009)는 초등학교 6학년 학생 2명을 대상으로 분수 나눗셈 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 연산 감각을 분석한 결과 학생들은 모두 포함제 의미의 문장제를 제시하였으며, 분수 나눗셈 알고리즘에서 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유를 이해하는 측면에서 역수의 의미와 역수를 곱하는 이유를 형식적으로 완벽하게 이해하고 있지는 못했다. 아울러 예비교사와 초등학생을 대상으로 한 연구에서 나타난 문제를 해결하기 위해 제수의 역수의 의미와 제수의 역수를 곱하는 이유를 명확하게 드러내는 단위 비율의 결정 맥락에서 분수 나눗셈 도입을 제안하는 연구(임재훈 외, 2005; 조용진 외, 2013), 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 도입을 제안하는 연구(임재훈, 2007), 분수 나눗셈의 다양한 의미에 따른 문제 상황 제시를 통한 분수 나눗셈 도입을 제안하는 연구(방정숙 외, 2009; 김경미 외, 2011; 신준식, 2013) 등 분수 나눗셈의 의미를 다양한 맥락에서 제시할 것을 제안하였음에도 불구하고 2009 개정 교육과정에 의한 6학년 교과서에서 분수 나눗셈은 여전히 포함제 맥락으로 전개되고 있다.

본 연구에서는 수학영재학생들을 대상으로 첫째, $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$ 연산과 관련한 실생활 문제 설정(problem posing) 활동을 통하여 수학영재학생들이 분수 나눗셈의 의미를 어떻게 이해하고 표현하는지 알아본다. 둘째, 학생들이 분수 나눗셈 문제 해결과정에서 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 어떻게 이해하고 설명하는지 분석한다. 이를 바탕으로 초등수학에서의 분수 나눗셈 단원의 효과적인 지도를 위한 시사점을 제시한다.

Ⅱ.분수 나눗셈의 의미와 알고리즘

1. 분수 나눗셈의 의미

분수 나눗셈의 의미에 대한 분류는 학자에 따라 다양하다. Sinicrope, Mick과 Kolb(2002)와 박교식 외(2004)가 제시한 ‘포함제’, ‘등분제’, ‘단위 비율의 결정’, ‘곱셈의 역’, ‘카테시안 곱의 역’으로 나뉘기도 하고, Ma(2002)는 ‘측정 모델’, ‘분할 모델’, ‘곱과 인수 모델’로 나누기도 한다. Ma(2002)와 Sinicrope, Mick과 Kolb(2002)가 제시한 ‘측정 모델’은 박교식 외(2004)가 제시한 ‘포함제’의 의미이며, ‘분할 모델’은 ‘등분제’의 의미이다. ‘단위 비율의 결정’은 자연수 나눗셈의 등분 상황에서 계산 결과는 몫을 나타내기도 하지만 단위의 크기 또는 비율을 나타내기도 한다는 점에서 등분 상황의 특수한 경우 또는 등분 상황의 확장이라고 할 수 있으므로(김명운, 2009; 신준식, 2013; 강흥규, 2014) 본 논문에서도 등분제와 단위 비율의 결정을 통합하여 등분제로 분류한다. 이에 따라 본 연구에서는 분수 나눗셈의 의미를 ‘포함제’, ‘등분제’, ‘곱셈의 역’, ‘카테시안 곱의 역’의 네 가지로 범주화한다. 다음에서는 이러한 네 가지 범주별로 분수 나눗셈의 의미를 살펴보고, 본 연구에서 제시한 과제인 ‘$\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$에 적합한 실생활 문제’를 함께 제시한다.

첫째, 포함제는 Ma(2002)에 따르면 ‘ $1\frac{3}{4}$안에 포함된 $\frac{1}{2}$의 개수 알아내기’혹은 ‘ $1\frac{3}{4}$은 $\frac{1}{2}$의 몇 배인지 알아내기’로 설명된다. 즉, 주어진 단위로 대상의 양을 측정하는 것으로 문제에 제시된 피젯수와 제수가 같은 종류의 양이다. 포함제의 경우에는 그 몫이 이산량인지 연속량인지에 따라 나누어 생각할 필요가 있다. 이산량인 경우에는 몫은 항상 자연수로 나와야 하고 나머지가 남을 계산식이면 나머지를 다루어야 한다(김명운, 2009). 이에 따라 포함제 맥락에서 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$에 적합한 문제는 분수의 나눗셈 결과가 나누는 수의 몇 배가 된다는 ‘배’의 관점에서 접근하여 ‘A가 가진 리본의 길이는 $\frac{3}{4}$m이고, B가 가진 리본의 길이는 $\frac{2}{3}$m이다. A가 가진 리본의 길이는 B의 몇 배인가?’ 등의 문제를 만들 수 있다.

둘째, 등분제는 주어진 양을 다른 종류의 양으로 나누는 것으로 문제에 제시된 피젯수와 제수가 다른 종류의 양이다. 하지만 등분이라는 말이 지닌 일상적 의미는 나누는 수가 분수인 경우에 적합하지 않다(박교식 외, 2004). 이에 따라 등분제의 본질을 단위량에 해당하는 양을 구하는 것으로 보면 단위 비율 결정의 맥락이 된다. 등분제 맥락에서 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$에 적합한 문제는 ‘고양이 사료 $\frac{3}{4}$kg으로 사료

그릇의 $\frac{2}{3}$만큼을 채운다면, 사료 그릇을 가득 채우기 위해서는 사료가 몇 kg 필요할까?' 등이 될 수 있다.

셋째, 곱셈의 역은 나눗셈을 곱셈의 역연산으로 생각하는 것이다. 예를 들어, $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$은 '어떤 수에 $\frac{2}{3}$를 곱한 값이 $\frac{3}{4}$이 되는 어떤 수는 무엇인가?'와 같은 문제를 의미한다. 실생활 문제는 '물통에 물이 $\frac{3}{4}$L가 있다. 이는 어제 물통에 있던 물의 $\frac{2}{3}$이다. 어제 물통에 있던 물은 몇 L인가?'를 만들 수 있다.

넷째, 카테시안 곱의 역은 양과 양의 곱, 차원과 차원의 곱으로 직사각형의 넓이를 구하는 것을 한 예로 들 수 있다. 또한 '$1\frac{3}{4}$km의 거리를 가는 데 $\frac{1}{2}$시간이 걸렸을 때 속력을 구하라.'는 것과 같은 속도나 농도를 이용한 소재도 카테시안 곱의 역 상황의 나눗셈 문장제를 구성하는 데 사용할 수 있다(박교식 외, 2004). $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$의 경우 '넓이가 $\frac{3}{4}$cm^{2}인 직사각형이 있다. 가로의 길이가 $\frac{2}{3}$cm라면 세로의 길이는 몇 cm인가?'와 같은 문제를 만들 수 있다.

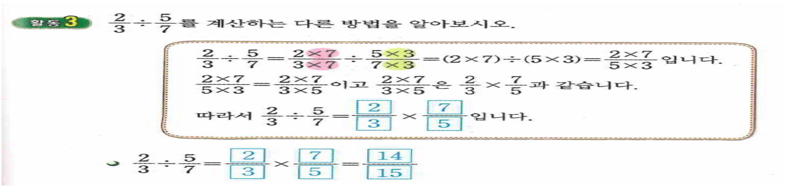
2. 분수 나눗셈의 알고리즘

분수의 나눗셈 알고리즘이 학생들에게 단지 '제수의 역수를 곱한다' 는 도구적 이해에 그치는 것이 아니라 문제 상황 속에서 분수의 곱셈 형태로 바꾸어 계산되게 되는 과정을 통해 의미 있는 형식화가 되어야 한다. 이에 따라 앞에서 제시한 분수 나눗셈의 의미에 따른 '포함제', '등분제', '곱셈의 역', '카테시안 곱의 역' 맥락에서 제수의 역수를 곱하는 의미를 살펴본다.

첫째, 포함제 맥락에서 $1\div\frac{3}{5}$은 다음과 같이 해결할 수 있다(Siebert, 2002).

1안에는 $\frac{1}{5}$이 5번 들어간다. $\frac{1}{5}$은 $\frac{3}{5}$의 $\frac{1}{3}$이다. 그러므로 1안에 $\frac{3}{5}$의 $\frac{1}{3}$이 5번 들어간다. 즉, 1 안에는 $\frac{3}{5}$이 $\frac{5}{3}$번 들어간다.

이로부터 제수의 역수를 곱한다는 알고리즘을 유도할 수 있다. 즉, $\frac{3}{5}$을 $\frac{5}{3}$번 하면 1이 되기 때문에 제수의 역수를 곱하는 것이다. 하지만, 교과서에서는 포함제 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 [그림Ⅱ-1]과 같이 설명하고 있다.


활동 3 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7}$를 계산하는 다른 방법을 알아보시오.

$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2\times7}{3\times7} \div \frac{5\times3}{7\times3} = (2\times7)\div(5\times3) = \frac{2\times7}{5\times3}$ 입니다.

$\frac{2\times7}{5\times3} = \frac{2\times7}{3\times5}$ 이고 $\frac{2\times7}{3\times5}$ 은 $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ 과 같습니다.

따라서 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \times \frac{\boxed{7}}{\boxed{5}}$ 입니다.

$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \times \frac{\boxed{7}}{\boxed{5}} = \frac{\boxed{14}}{\boxed{15}}$

[그림Ⅱ-1] 교과서의 분수 나눗셈 알고리즘(교육부, 2015)

포함제를 주어진 단위로 대상의 양을 측정하는 것으로 본다면, 측정하는 상황에서 측정 단위를 같게 해야 한다. 현행 교과서에서 분수 나눗셈 알고리즘을 설명하는 과정은 이와 같은 맥락에서 이뤄진다. 이는 임재훈 외(2005)가 제시한 비 또는 측정 단위의 세분 맥락에서 알고리즘[2)]과 유사한 것으로 피젯수와 제수를 같은 측정 단위로 표현함으로써 제수가 분수인 나눗셈을 제수가 자연수인 나눗셈으로 환원한다. 이 과정은 분수 나눗셈 알고리즘에서 측정단위를 같게 하기 위해 '제수의 분모인 자연수'를 피젯수에 곱하는 이유를 설명해주지만, 제수의 역수 자체의 의미는 분명하지 않다. 그렇다보니 분수 나눗셈 알고리즘을 통분을 통해 측정 단위를 갖게 함으로써 이분모분수의 나눗셈을 동분모분수의 나눗셈으로 환원하며, 결국에는 자연수의 나눗셈으로 계산하게 하나, 제수의 역수의 의미를 이해하기는 어렵다. 이에 따라 학생들은 '분수의 나눗셈은 통분을 한 후 분자끼리 나눈다'는 알고리즘을 알게 되지만, 제수의 역수를 곱하는 알고리즘에 대한 의미 있는 이해는 어렵다고 볼 수 있다.

둘째, 등분제 맥락의 문제로 김명운(2009)은 다음과 같은 문제를 제시하고 알고리즘을 정당화한다.

'떡을 만들기 위해 $\frac{4}{5}$kg의 쌀을 찌려고 떡시루에 넣었더니 떡시루의 한 개의 $\frac{2}{3}$만큼 채워졌다. 1개의 떡시루에 담길 수 있는 쌀의 무게는 몇 kg 인가?'

한 개의 떡시루에 쌀을 가득 채우려면 떡시루 $\frac{2}{3}$개의 $\frac{3}{2}$배가 필요하므로 한 개의 떡시루에 들어가는 쌀의 양은 다음과 같이 구할 수 있다.

2) 임재훈 외(2005)는 우리나라 교과서에서의 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방식은 ' 비 또는 측정 단위의 세분 맥락' 과 유사하다고 볼 수도 있으나, 피젯수와 제수의 분모를 통분하는 이유가 측정 단위를 같게 하기 위한 것이 아니라, 단지 동분모분수를 만들기 위한 것이라는 점에서 동일하다고 볼 수는 없다고 하였다.

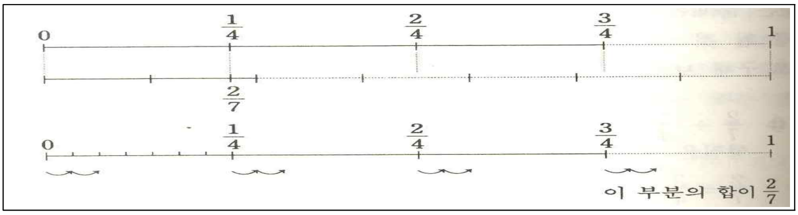
$$\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{10}=1\frac{1}{5}$$

위의 알고리즘은 제수의 역수의 곱셈으로 전환되는 것이 자연스럽다. 이는 '줄이고 늘이는 연산자'(Siebert, 2002)로 설명될 수도 있다. 즉 위의 식에서 $\frac{2}{3}$에 해당하는 양이 $\frac{4}{5}$일 때 1에 해당하는 양은 먼저 $\frac{1}{3}$에 해당하는 것을 구하기 위해 2로 나누고, 다시 1에 해당하는 것을 구하기 위해 3을 곱하는 과정으로 다음과 같은 알고리즘으로 표현될 수 있다.

$$\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\div 2\times 3=\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}$$

이렇듯 등분제 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘은 제수의 역수의 의미가 명확하다는 장점이 있다.

셋째, 곱셈의 역 맥락에서 이용률(2001)은 분수 나눗셈 알고리즘을 다음과 같이 제시한다. 나눗셈 $\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}$을 구하는 방법은 '$\frac{2}{7}$는 $\frac{3}{4}$의 몇 배?, 즉, $\frac{2}{7}$는 $\frac{3}{4}$의 몇 분의 몇'으로 보고, 1을 4등분한 각각에 $\frac{2}{7}$를 취하여 더하면 된다는 생각에서 $\frac{3}{4}$은 화살표가 7×3개, $\frac{2}{7}$는 화살표가 2×4개 그러므로 $\frac{2}{7}$는 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2\times 4}{7\times 3}$이다.

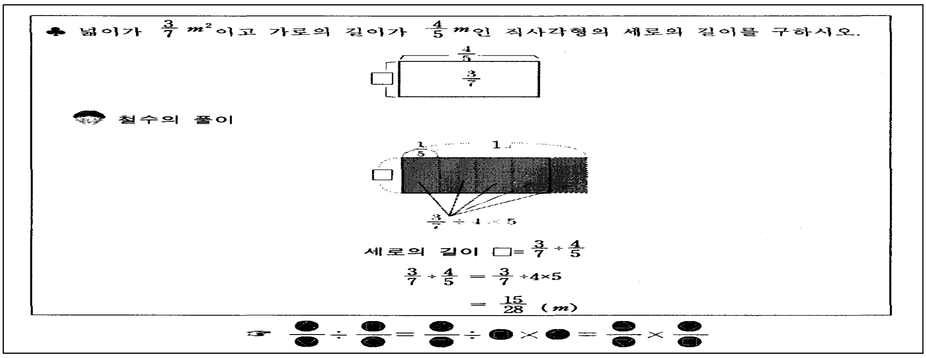


[그림Ⅱ-2] 곱셈의 역연산 수직선 모델(이용률, 2001: 162)

이 과정을 통해 $\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}$을 설명할 수 있으나, 제수의 역수를 곱하는 의미가 분명히 드러나지 않는다.

넷째, 카테시안 곱의 역의 대표적인 유형은 직사각형의 넓이 구하기 문제이다. 임재훈(2007)은 카테시안 곱의 역 맥락에서의 분수의 나눗셈 알고리즘 도입을 제안하며, 세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 1 또는 자연수로 만드는 방법,

넓이를 1로 만드는 방법을 제시하고 있다. 이 중 세로의 길이를 고정하고 가로의 길이를 1로 만드는 방법에 의한 알고리즘은 다음과 같다.



[그림Ⅱ-3] 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘(임재훈, 2007)

위 알고리즘은 가로의 길이를 $\frac{1}{4}$배 줄이고 5배 늘이는 과정을 통해 연산자로서 제수의 역수의 의미를 학생들이 이해할 수 있다는 장점이 있다. 또한, 강문봉(2004)의 연구에서도 분수 나눗셈 지도 방법 중 직사각형 넓이를 이용하는 방법, 즉 카테시안 곱의 역 맥락에서 지도 방법을 제시하여, 이 방법은 분수의 곱셈을 지도하는 상황과 일관성이 있으며, 제수의 역수를 곱하는 사실까지 지도할 수 있음을 밝히고 있다.

연구결과를 토대로 생각해보면 제수의 역수를 곱하는 분수 나눗셈 알고리즘의 의미 있는 이해를 위해 적합한 것은 등분제, 카테시안 곱의 역의 상황임을 알 수 있다. 하지만 현행 6학년 교과서에서는 포함제 맥락에서만 분수 나눗셈 상황이 제시되고 이를 통해 알고리즘이 제시되다 보니 학생들이 분수 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 의미에 대한 이해가 어려울 수 있으며, 이로 인해 학생들은 단순히 형식화된 알고리즘을 외워서 문제 해결에 적용할 수 있다는 문제가 발생할 수 있다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 2016학년도 대학부설 과학영재교육원 중등수학반 1차 합격생 41명을 대상으로 실시한 2단계 전형인 수업 관찰 평가[3]에서 당시에 초등학교 6학년

3) 수업 관찰 평가는 1차 합격생을 대상으로 4차시(160분) 동안 4개의 과제를 제시하고 수학영재

인 학생 36명이 작성한 탐구활동지를 분석하였다. 연구 대상인 초등학생들은 이전에 지역교육청 또는 교육청 영재원, 대학부설과학영재교육원 등에서 영재교육을 받았거나 학교장 추천을 받아서 지원한 131명의 학생들 가운데 서류 전형 및 창의성검사 과정을 통하여 선발된 학생이므로, 본 연구에서는 이들을 수학영재학생이라고 부르기로 한다.

2. 자료 수집 및 분석

분수 나눗셈을 어떤 의미로 이해하고, 분수 나눗셈 알고리즘에서 분수 나눗셈이 곱셈으로 바뀌는 것을 어떻게 설명하는지 알아보기 위해 다음과 같은 문제를 제시하였다.

분수 나눗셈은 곱셈으로 바꾸어 답을 구할 수 있다. 예를 들어 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$의 답은 $\frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$ 으로 구할 수 있다. 앞의 예가 참임을 보일 수 있는, 1) 두 가지 이상의 실생활 문제를 작성하고, 2) 각각의 실생활 문제의 풀이과정을 통하여 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$이 성립함을 설명하세요.

학생 36명 중 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$에 적합한 분수 나눗셈 문제를 1문제 이상 만든 학생은 18명(50%)이었으며 이 중 10명(27.8%)의 학생은 2문제 이상 만들었다. 영재학생 18명이 작성한 43문항 중 식을 그대로 문장으로 옮겨 단순히 나눗셈 계산을 요구한 경우, 문제에 이미 답이 제시 된 경우, 나눗셈 문제가 아닌 곱셈 문제를 만든 경우 등의 오류 문항 13문항[4)]을 제외한 30문항(69.8%)을 '포함제', '등분제', '곱셈의 역', '카테시안 곱의 역'으로 분수 나눗셈 의미를 범주화하여 분석하였다. 알고리즘에 대한 이해는 36명의 학생 중 알고리즘을 설명한 18명(50%)의 학생의 응답을 분석하여 유형화하였다. 분석에서 제외된 학생의 경우 분수 나눗셈 실생활 문제를 만들지 못하고, 분수 나눗셈 알고리즘에 대한 설명을 하지 못한 학생

학생들이 문제를 해결하는 과정을 관찰하여 평가하는 전형이다.

4) 분석에서 제외된 문장제의 예는 다음과 같다. ① 어느 한 상자는 어떤 물건을 넣으면 $\div\frac{2}{3}$시켜버리는 상자가 있다, 만약의 $\frac{3}{4}$개의 사과를 넣으면 몇 개의 사과가 나와 버리는가? ② $\frac{3}{4}$m의 긴 막대가 있었다. 그런데 이 막대를 다시 $\frac{2}{3}$m씩 나누려고 한다. 이때 한 도막의 길이는 몇 m일까? ③ 어떤 나무한테 물을 $\frac{3}{4}$L를 주어야 합니다. 그럼 이 나무보다 키가 $\frac{2}{3}$배 작은 나무한텐 몇 L를 주어야 합니까? (단, 주어야 하는 물의 양은 나무의 키에 비례한다.)

이 14명(38.9%)이었으며, 4명(11.1%)은 분수 나눗셈 실생활 문제를 만들었으나 분수 나눗셈 알고리즘에서 제수를 곱하는 것에 대한 설명을 하지 못한 학생이다. 수업 관찰 평가에서는 올바로 설정한 문제의 개수와 설정한 문제 상황의 다양성 및 분수 나눗셈 알고리즘의 설명 방법의 다양성을 토대로 창의성 평가를 하였지만, 전반적으로 점수가 매우 낮아서 다음의 연구결과 분석에는 포함하지 않는다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 분수 나눗셈의 의미 이해

학생 36명 중 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$에 적합한 분수 나눗셈 실생활 문제를 1문제 이상 만든 학생은 18명(50%)이었으며, 18명 모두 동일한 분수 나눗셈 상황으로 문제를 만들었다. 18명 중 13명은 포함제의 의미로 문제를 만들었으며, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역으로 만든 학생은 2명씩이었고, 등분제로 만든 학생은 1명이었다. 이를 통해 수학영재학생들에게도 실생활 맥락에서 분수 나눗셈 문제의 구성이 어렵다는 것과 분수 나눗셈의 다양한 의미에 대한 이해가 부족함을 알 수 있다. 이에 대한 이유로 실생활에서 분수 나눗셈을 활용하는 경우가 흔치 않은 점, 선행연구로 보여진 예비 또는 현직 교사의 분수 나눗셈 의미에 대한 부족한 이해, 교과서에서 포함제에 치우친 분수 나눗셈 의미 제시 등 학생들이 학교에서 분수 나눗셈을 배울 때 다양한 분수 나눗셈의 의미를 학습할 기회가 없었다는 점 등을 생각해볼 수 있다. 학생들이 작성한 문장제 문제 30문항 중 '포함제'가 24문항(80%)으로 가장 많았으며, '카테시안 곱의 역' 3문항(10%), '곱셈의 역' 2문항(6.7%), '등분제' 1문항(3.3%) 순이었다. 이는 2009 개정 교과서의 6학년 분수의 나눗셈은 동수누감의 원리에 따른 포함제 맥락으로 접근하고 있음에 따라 학생들이 교과서에서 가장 많이 접한 포함제 문항이 가장 많은 것으로 생각된다. <표Ⅳ-1>은 영재학생이 제시한 나눗셈 실생활 문제를 '포함제', '등분제', '곱셈의 역', '카테시안 곱의 역'으로 나누어 제시하였다.[5]

<표Ⅳ-1> 학생들이 설정한 분수 나눗셈 문제 상황

상황(의미)	문제의 예	문제 개수(%)

5) 학생들이 작성한 문제는 맞춤법, 띄어쓰기 등의 교정 없이 수록하였으며, 학생들이 만든 문항 중 분수 나눗셈의 개념은 이해했다고 보이나 부분적인 오류를 포함하고 있는 문제 즉, 단위, 용어 등의 오류를 보인 경우는 분석에 포함하고 각주로 설명하였다.

포함제	① $\frac{3}{4}$조각의 피자가 있었다. 그런데 이 피자를 접시에 나누어 담으려고 한다. 피자를 $\frac{2}{3}$조각씩 나누어 접시에 담을 때 모두 몇 개의 접시에 피자를 나누어 담을 수 있을까? 6) ② $\frac{3}{4}$L의 주스가 있다. 이를 $\frac{2}{3}$L씩 들어가는 컵에 담으려고 한다. 주스는 몇 컵이 나오는가? ③ 물이 $\frac{3}{4}$L가있다. 용량이 $\frac{2}{3}$L인 바가지가단위일 때 물은 몇 바가지인가? ④ $\frac{3}{4}$mL들이 음료수 통이 있습니다. 이 음료수통에 들어있는 음료수를 $\frac{2}{3}$mL들이 통에 나누어 담으려고 하면 통이 몇개 필요할까요?7) (단 통이 꼭 정수개 있는 것은 아닙니다.) ⑤ 한 물건을 만드는데 $\frac{2}{3}$만큼의 재료가 필요하다. 재료가 $\frac{3}{4}$있다면 물건을 몇 개를 만들 수 있는가? ⑥ $\frac{3}{4}$L 들이 물통이 있다. 이를 $\frac{2}{3}$L들이 물통으로 가득 채우려고 한다. 이때, $\frac{2}{3}$L들이 물통의 몇 배의 물통으로 처음 물통을 채울수 있는가?	24 (80%)
등분제	① 사과$\frac{3}{4}$개를 접시의 $\frac{2}{3}$개에 담으려고 한다. 그럼 접시 1개에는 얼만큼의 사과가 있는가?	1(3.3%)
곱셈의 역	① 한 세균이 1분에 $\frac{2}{3}$배씩 늘어납니다. 그럼 지금 세균이 $\frac{3}{4}$mg 있다면 1분 전에는 몇 mg 였겠습니까? ② A회사는 이번년도에 투자금의 $\frac{3}{4}$의 이익을 봤다. 이 비율은 전년도 대비 $\frac{2}{3}$배 증가 했는데 그렇다면 작년에는 투자금의 얼마의 이득을 봤나? (단, 투자금은 동일)	2(6.7%)
카테시안 곱의 역	① 드디어 제2신세계 백화점 공사가 시작되었다. 총 넓이가 $\frac{3}{4}$km2인 땅의 가로가 $\frac{2}{3}$km라고 한다. 그러면 세로의 길이는 어떻게 구할수 있을까? 그리고 세로는 몇 km 일까? ② 사이클 선수가 $\frac{3}{4}$km를 달리려고 하는 데, $\frac{3}{4}$km를 이 사람은 $\frac{2}{3}$분 만에 달릴 수 있었다고 한다. 그럼 이사람이 달릴 때 평균 속	3(10%)

	력은 시속 몇 킬로미터가 되는가?[8] ③ 농도가 $\frac{2}{3}$%인 소금물이 있다. 이 소금물에 들어있는 소금의 양이 $\frac{3}{4}$g일 때 소금물은 몇 그램일까?	

학생들이 포함제 맥락에서 분수 나눗셈 문제를 만든 경우, 물, 주스, 음료, 피자, 빵 등의 음식을 소재(75%)로 한 것이 대부분이었다. 영재학생이 포함제 맥락에서 만든 24문항 중 21문항(87.5%)이 이산량을 소재로 하여 만든 문항으로서 해의 분수 표현이 적절하지 않은 문제였다. 2009 개정 6학년 교과서에도 분수 나눗셈의 계산 결과가 답이 되지 않는 상황이 제시되나 분수 나눗셈 계산 결과를 구하는 것만 제시되고 문제의 답에 대한 언급이 없다. 예를 들어, 몫이 $4\frac{1}{6}$이어서 답을 $4\frac{1}{6}$병이라고 표현하는 것은 옳지 않으며 5병으로 답하는 것이 적합하나 몫($4\frac{1}{6}$)을 구한 후 문제에서 요구하는 답(5병)에 대한 언급은 교사용 지도서에도 제시되고 있지 않다. 분수는, 그가 가진 비라는 본질에 적합하도록, 분할이 가능한 연속량 단위 다시 말하면 정확하게 규정된 단위에 적용되어야 한다(Dewey & McLellan, 1895; 강흥규, 2014에서 재인용). 포함제 맥락에서는 이산량으로 취급되어야 하는 맥락임을 분명히 밝혀서 학생들이 몫을 분수로 처리하는 경우가 없도록 해야 한다(김명운, 2009). 하지만 교과서 문제의 몫을 처리하는 방법에도 이에 대한 안내가 자세히 없어 학생들이 몫이 분수인 경우에도 이산량으로 문제를 만든 경우가 많았다. 이는 예비 교사를 대상으로 한 연구(박교식 외, 2004)에도 지적된 것으로, 우리나라 예비 초등 교사들도 포함제 맥락의 문제를 많이 만들고 있지만, 몫이 이산량으로 주어지는 경우 그것이 자연수이어야 한다는 이해가 부족함을 알 수 있다. 따라서 교과서에서 포함제 맥락에서 분수 나눗셈 문제 상황 구성 시 이와 같은 고려가 필요하며, 그렇지 못한 경우에는 교사의 적절한 지도가 필요하다.

포함제의 ⑥번 문제와 같이 몫이 자연수 또는 분수로 나타내어도 자연스러운 “제수는 피젯수의 몇 배인가?” 하는 문제는 2문제뿐이었다. 이 또한 교과서에서

6) ‘피자를 $\frac{2}{3}$조각씩 나누어....’ 에서 $\frac{2}{3}$조각의 크기가 남은 피자의 $\frac{2}{3}$인지 아니면 원래 피자의 $\frac{2}{3}$ 크기인지 명확하지 않으나 분석에 포함하였다.

7) $\frac{3}{4}$mL, $\frac{2}{3}$mL 의 음료수 통의 크기는 비현실적이나, 수학적으로는 오류가 없으므로 분석에 포함하였다.

8) 시속을 분속으로 고쳐야 정확한 문제이다.

분수 나눗셈을 동수누감의 원리에 따른 포함제로 접근함에 따라 이와 같은 문제를 접하지 못한 것에 기인하는 것으로 보인다.

학생들이 등분제 맥락에서 1개의 문제를 설정하였다. 분수 나눗셈에서 등분제의 경우에는 피젯수와 몫이 같은 양을 뜻하기 때문에 몫인 양이 연속량밖에 될 수 없다(김명운, 2009). 하지만 이 학생은 이산량으로 문제를 만들었기 때문에 엄밀히 말하면 등분제 맥락의 분수 나눗셈 상황으로 적합하지 않다고 할 수 있다. 이는 자연수의 나눗셈 상황을 분수 나눗셈의 상황으로 그대로 옮겨 나타난 오류로 보인다. 예를 들어, '사과 12개를 접시 3개에 똑같이 나누어 담으려고 한다. 접시 1개에 담기는 사과는 몇 개인가? 의 문제이다. 6학년을 대상으로 한 선행연구(강영란 외, 2012)에서의 학생들이 등분제 맥락의 문장제 구성에 어려움을 보인 것과 같이 본 연구의 대상인 수학영재도 등분제 맥락에서 분수 나눗셈 의미 이해가 부족함을 알 수 있다. 이는 학생들이 현행 6학년 교과서에서 등분제 맥락의 분수 나눗셈 문제를 접하지 못했기 때문으로 보인다.

학생들이 곱셈의 역 맥락에서 만든 문제는 2개[9] 이었고, 곱셈의 역 맥락의 경우 곱셈의 역연산으로서의 나눗셈에 대한 의미를 이해하는 것으로, 예비교사를 대상으로 한 선행연구(박교식 외, 2004)와 일반학생을 대상으로 한 선행연구(강영란 외, 2012)에서는 1문제도 제시되지 않은 경우이나, 수학영재학생들은 2문제를 제시하였다. 하지만 2문제 모두 분수 곱셈에서의 배의 개념에 대한 이해가 부족하여, $\frac{2}{3}$배 증가한다고 표현하는 오류를 보였다.

학생들이 카테시안 곱의 역 맥락에서 만든 문제는 3문제로서, 카테시안 곱의 역 맥락에서 직사각형의 넓이 외에 속도, 농도의 문제가 제시된 것은 선행연구(박교식 외, 2004; 강영란 외, 2012)와 차별화되는 점이다.

이상의 분석을 통해 알 수 있는 점은 첫째, 선행연구의 결과와 같이 수학영재 학생 또한 분수 나눗셈의 의미를 포함제 맥락으로 이해하는 비율이 높았으며, 분수 나눗셈의 다양한 의미에 대한 이해가 부족하였다. 이는 2009개정 교육과정에 의해 분수 나눗셈을 학습한 학생들이기에 교과서에서 접한 분수 나눗셈의 상황이 대부분 포함제 맥락이었기 때문으로 보인다. 이에 따라, 학생들의 분수 나눗셈 의미에 대한 이해를 돕고 수학적 사고력을 향상시키기 위해서는 다양한 문제 상황을 기반으로 한 분수 나눗셈 지도가 필요하다고 사료된다.

둘째, 선행연구에 비해 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역 맥락에서 더 다양한 상황

---

9) $\frac{2}{3}$배 늘어난다, 증가했다는 표현은 옳지 않다. '~배'라는 용어를 자연수의 곱셈에서 생각하면 그 결과가 더 커져야 하나 분수의 곱셈에서는 그렇지 않다. 이에 대한 이해가 부족하여 오개념을 보이는 경우이다.

이 제시되긴 했지만, 수학영재학생 36명 중 18명(50%)만이 분수 나눗셈에 적합한 실생활 문제를 만들 수 있었고, 기본적인 연산의 의미에 대한 이해가 부족한 경우가 있으며, 문제에서 부분적인 오류를 보인 분수에 있어서의 부분-전체의 개념, '배'의 개념 등에 대해서도 이해가 부족한 경우도 있었다. 따라서 영재학생에 대해서도 문제해결의 바탕이 되는 기본적인 연산의 의미, 수학적 개념에 대한 지도가 필요함을 알 수 있다.

2. 분수 나눗셈의 알고리즘에 대한 이해

분수 나눗셈 알고리즘의 핵심인 제수의 역수를 곱하는 과정과 그 의미 대한 학생들의 이해를 알아보기 위해 36명의 학생 중 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 기술한 18명(50%)의 학생의 응답을 분석하였다. 18명의 학생 중 2가지 이상의 방법을 제시한 학생 2명의 경우 각각의 유형에 모두 포함하였다. 수학영재의 분수 나눗셈 알고리즘 유형은 제수의 역수를 곱하는 의미에 대한 이해를 바탕으로 설명한 유형과 제수의 역수를 곱하는 의미에 대한 이해 없이 알고리즘을 설명한 유형으로 분류하였다. 각 유형별로 분수 나눗셈 의미 이해는 <표Ⅳ-3>과 같다. 각 유형별로 살펴본다.

<표Ⅳ-2> 분수 나눗셈 알고리즘 유형

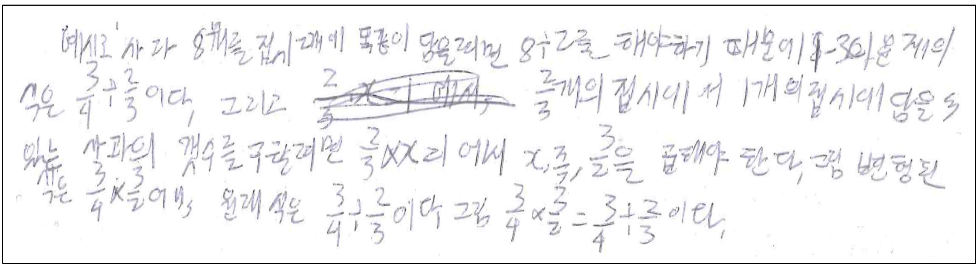
제수의 역수를 곱하는 의미에 대한 이해 여부	알고리즘 유형	응답수
1. 제수의 역수를 곱하는 의미 이해를 통한 알고리즘 설명	1. 등분제 맥락의 알고리즘	2(10%)
2. 제수의 역수를 곱하는 의미에 대한 이해 없이 알고리즘 설명	1. 분수가 나눗셈의 결과라는 것을 활용	5(25%)
	2. A=C, B=C 이므로 A=B라는 추이성 활용	5(25%)
	3. "어떤 수로 나누는 것은 그 역수로 곱하는 것과 같다." 활용	4(20%)
	4. 번분수 알고리즘 활용	4(20%)

1) 제수의 역수를 곱하는 의미에 대한 이해를 통한 분수 나눗셈 알고리즘 설명

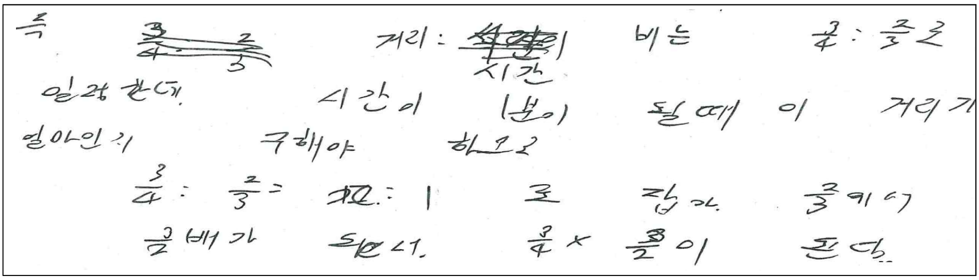
역수를 곱하는 의미가 드러났던 분수 알고리즘 유형은 2회(10%) 제시되었는데 각각은 다음과 같다.

[그림Ⅳ-1]에 의한 분수 나눗셈 알고리즘은 등분제 맥락에 따라 분수 나눗셈 문제를 만들고, 1에 해당하는 것을 구하기 위해 제수의 역수를 곱하는 의미를 드

러내어 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3} = \frac{3}{4}\times\frac{3}{2}$의 알고리즘을 설명한 예이다.


예시로 사과 8개를 접시 2개에 똑같이 담을려면 8÷2를 해야하기 때문에 8-30 문제의 식은 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$이다, 그리고 ~~$\frac{2}{3}\times$ 에서,~~ $\frac{2}{3}$개의 접시에서 1개의 접시에 담을 수 있는 사과의 갯수를 구할려면 $\frac{2}{3}\times x=1$ 에서 x, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$을 곱해야 한다, 그럼 변형된 식은 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}$이며, 원래 식은 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$이다 그럼 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}$이다,

[그림Ⅳ-1] 등분제 맥락의 분수 나눗셈 알고리즘 1


즉 ~~$\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$~~ 거리 : ~~시간~~ 시간의 비는 $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$로 일정한데, 시간이 1분이 될때 이 거리가 얼마인지 구해야 하므로 $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = x : 1$로 잡고, $\frac{2}{3}$의 $\frac{3}{2}$배가 되니, $\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}$이 된다.

[그림Ⅳ-2] 등분제 맥락의 분수 나눗셈 알고리즘 2

[그림Ⅳ-2]에 의한 분수 나눗셈 알고리즘은 두 양 사이의 비례 관계를 드러내고 비의 성질에 의해 $\frac{2}{3}$ 가 1이 되기 위해 $\frac{3}{2}$을 곱하기 때문에 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}$을 해야 함을 설명하고 있다. 이 또한 등분제의 맥락에서 1에 해당하는 것을 구하기 위해 제수의 역수를 곱하는 의미를 드러내어 알고리즘을 정당화하였다고 볼 수 있다.[10] 이를 통해 제수의 역수의 의미와 제수의 역수를 곱하는 이유를 명확하게 드러내는 등분제 맥락에서 분수 나눗셈을 도입한다면 제수의 역수를 곱하는 분수 나눗셈 알고리즘에 대해 학생들에게 의미 있는 이해가 가능함을 알 수 있다.

2) 제수의 역수를 곱하는 의미에 대한 이해는 없으나 분수 나눗셈 알고리즘 설명

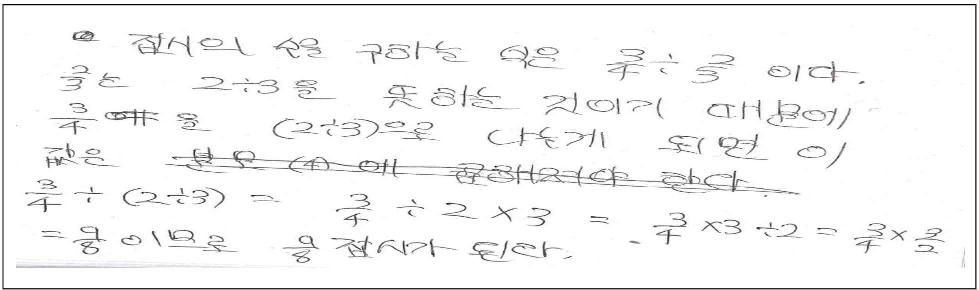
---

10) '사이클 선수가 $\frac{3}{4}$km를 달릴려고 하는데 $\frac{3}{4}$km를 이 사람은 $\frac{2}{3}$분 만에 달릴 수 있었다고 한다. 그럼 이 사람이 달릴 때 평균 속력은 시속 몇 킬로미터가 되는가?'의 문제에 대한 풀이과정이다. 박교식 외(2004)에 따라 속력 문제로 카테시안 곱의 역으로 분류하였으나, '1분 동안에는 몇 km를 달릴 수 있는가?'로 구하였기에 등분제 맥락의 알고리즘 정당화로 해석할 수 있다.

(1) 유형 2-1. 분수가 나눗셈의 결과라는 것을 활용 : $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{4}\div(2\div3)=\frac{3}{4}\div2\times3=\frac{3}{4}\times3\div2$

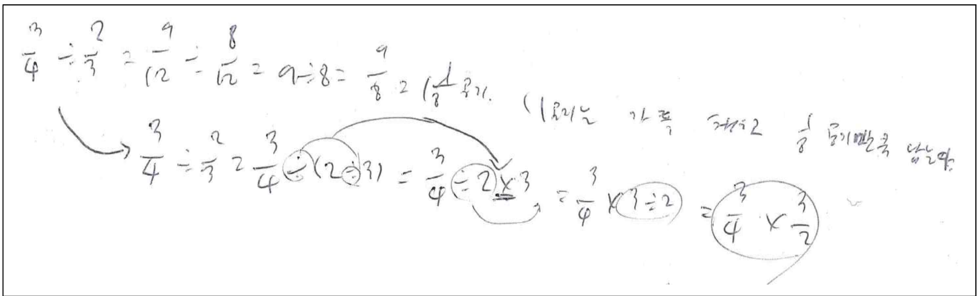
$=\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}$

유형 2-1과 같이 설명한 경우는 5회(25%)였다. 이는 Ma(2002)의 연구에서 교환법칙, 괄호의 성질, 분수가 나눗셈의 결과라는 것을 이용한 방법과 동일하다. 유형 2-1로 알고리즘을 설명한 5명의 학생들도 분수가 나눗셈의 결과라는 것과 교환법칙, 괄호의 성질과 연산 기호의 분배 법칙 등을 통해 설명하였다.



[그림Ⅳ-3] 분수 나눗셈 알고리즘 유형 2-1

위의 과정은 대수적 조작을 통해 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}$이 되는 것을 설명하고 있으나 여기서 제수의 역수의 의미를 설명하기는 어렵다. 2-1의 유형으로 분수 나눗셈 알고리즘을 정당화 한 경우 모두 포함제 맥락으로 문제를 만들었는데, [그림 Ⅳ-4]와 같이 포함제 맥락에서 문제를 풀 때는 통분을 통해 자연수의 나눗셈으로 환원하여 몫을 구하였으나, 그 과정에서 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 설명하지 못하고, 대수적 전개를 통해 알고리즘을 설명한 것으로 보인다.



[그림Ⅳ-4] 분수 나눗셈 알고리즘 유형 2-1

(2) 유형 2-2. A=C, B=C 이므로 A=B라는 추이성 활용 : '$\frac{3}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{9}{8}$이고 $\frac{3}{4}\times\frac{3}{2}=$

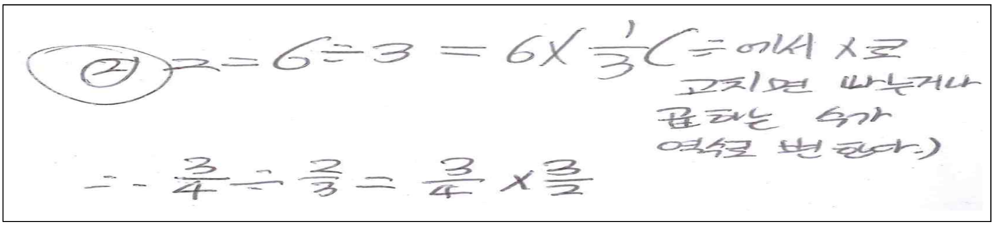
$\frac{9}{8}$ 이므로 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$'

위의 식은 'A=C, B=C 이므로 A=B' 라는 설명이다. 이를 통해 'A=B' 라는 것, 즉 '$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$' 이 성립함을 설명할 수 있으나, 이것이 분수 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 의미를 설명하지는 않는다. 유형 2-2로써 알고리즘을 설명한 영재학생 5명(25%)중 4명은 포함제 맥락의 분수 나눗셈 문제를 만든 경우이며, 1명은 만들지 못한 경우이다. 포함제 맥락에서 분수 나눗셈의 의미를 이해한 4명의 학생의 경우 덜어내는 조작이나 통분을 통해 문제를 해결하였고, 이러한 과정에서 분수 나눗셈에서 제수의 역수의 의미를 이해하지 못한 채 단순히 계산의 결과가 같기 때문에 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$이라는 알고리즘을 이끌어내었다.

(3) 유형 2-3. "어떤 수로 나누는 것은 그 역수로 곱하는 것과 같다." 활용: '$\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$'

Ma(2002)의 연구에서 중국교과서에서 분수 나눗셈 계산법을 설명하기 위해 사용하는 "어떤 수로 나누는 것은 그 역수로 곱하는 것과 같다."는 것을 알고 설명한 경우는 4명(20%)이었다. 이중 1명은 포함제 맥락에서 분수 나눗셈 문제를 만들고 통분을 하여 나눗셈 문제를 해결하였으나 그 과정에서 제수의 역수의 의미를 설명하지 못한 채 기술한 경우였다. 나머지 3명은 실생활 문제를 만들지 못했거나 오류를 보인 경우이다. 4명의 학생 중 2명의 학생은 (자연수)÷(자연수)=(자연수)×(자연수의 역수)의 알고리즘에 의해서, 2명의 학생은 (자연수)÷(분수)=(자연수)×(분수의 역수)의 알고리즘에 의해서 어떤 수를 나누는 것은 그 역수를 곱한다는 사실을 설명하고 이를 적용하여 분수 나눗셈 알고리즘을 설명한 경우이다. (자연수)÷(자연수)=(자연수)×(자연수의 역수)의 알고리즘은 분수의 나눗셈이 도입되는 5학년 2학기 2차시에 도입된다. 예를 들어 길이가 2m인 끈을 3도막으로 똑같이 자르려고 할 때 한 도막은 몇 m인지 알아보려는 상황을 통해 자연수의 나눗셈의 의미가 확장되어 2÷3으로 나타낼 수 있으며 2÷3은 2를 3등분한 것 중의 하나이므로 2의 $\frac{1}{3}$이다. 따라서 한 도막의 길이는 2m의 $\frac{1}{3}$배이므로 $2 \div 3 = 2 \times \frac{1}{3}$로 나타내어 구할 수 있다(교육부, 2015). 하지만 학생이 답안지에 작성한 내용을 통해서는 앞의 알고리즘에서 분수 나눗셈 결과가 나누는 수의 몇 배가 된다는 '배'의 개념에 대한 이해를 바탕으로 양에 어떤 수를 나누는 것은 그 수의 역수 배가 되는 것을 이해하였는지는 드러나지 않았다. 단지, [그림Ⅳ-5]와 같이 '나누기를 곱하기로 고치면 곱하는 수가 역수로 변한다.' 라는 것을 알고 풀

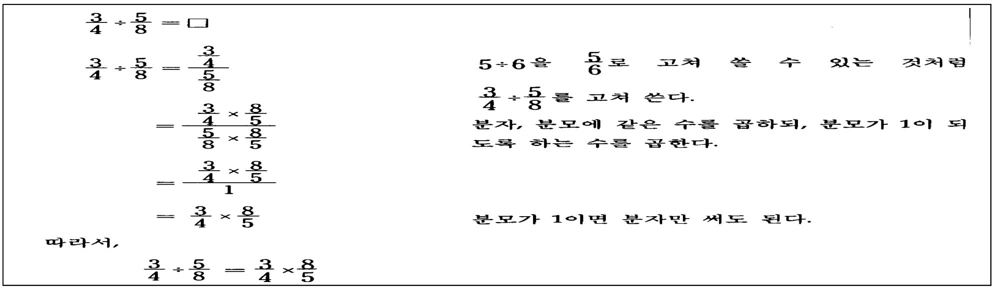
이하였다. (자연수)÷(분수)=(자연수)×(분수의 역수)에 의해 '제수의 역수를 곱한다' 고 한 2명의 경우도 앞의 경우와 같이 '나누기를 곱하기로 고치면 곱하는 수가 역수로 변한다.' 라는 것을 통해 설명한 경우였다. 이를 통해 학생들이 이해하는 역수는 단순히 '분모와 분자를 바꾼 수'로 이해되고 있음을 알 수 있다. 임재훈 외(2005)가 지적한 바와 같이 학생들은 제수의 역수의 의미를 '제수와 곱해서 1이 되게 하는 수'로 인식하지 못한 채, 단지, '제수의 분자, 분모를 뒤바꾼 수'로 이해하고 있음을 알 수 있다.



[그림Ⅳ-5] 분수 나눗셈 알고리즘 유형 2-3

(4) 유형 2-4. 번분수 알고리즘 활용: $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3 \times 3}{4 \times 2} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$

번분수는 초등 수학교육과정에서 학습하는 개념이 아니나 번분수로 분수 나눗셈 알고리즘을 정당화 한 경우가 4회(20%)였다. 번분수를 이용한 분수 나눗셈 알고리즘은 [그림Ⅳ-6]과 같이 제시될 수 있다(강문봉 외, 1999).



$\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} = \square$

$\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{8}}$ 5÷6을 $\frac{5}{6}$로 고쳐 쓸 수 있는 것처럼 $\frac{3}{4} \div \frac{5}{8}$를 고쳐 쓴다.

$= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{8}{5}}{\frac{5}{8} \times \frac{8}{5}}$ 분자, 분모에 같은 수를 곱하되, 분모가 1이 되도록 하는 수를 곱한다.

$= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{8}{5}}{1}$

$= \frac{3}{4} \times \frac{8}{5}$ 분모가 1이면 분자만 써도 된다.

따라서,

$\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{5}$

[그림Ⅳ-6] 번분수 분수 나눗셈 알고리즘(강문봉 외, 1999:569)

이 학생이 작성한 답안에서는 분자, 분모에 1이 되도록 하는 수를 곱하여 분모가 1이면 분자만 써도 된다는 절차가 드러나지 않아, 이러한 이해를 통해 분수 나눗셈 알고리즘을 이끌어냈다고 보기는 힘들다. 4명의 학생들은 [그림Ⅳ-7]과 같이 식을 쓰고 문제를 해결하였다.

증명)

$$\underline{\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3\times3}{4\times2} = \underline{\frac{3}{4} \times \frac{3}{2}}$$

[그림Ⅳ-7] 분수 나눗셈 알고리즘 유형 2-4

이상의 분석결과를 통해 주목할 점은, 첫째, 교과서에 제시된 방법에 의해 분수 나눗셈 알고리즘을 기술한 경우가 없다는 점이다. 이를 통해 현행 교과서에서 제시하는 알고리즘이 학생들이 분수 나눗셈 알고리즘에서 제수의 역수를 곱하는 과정, 제수의 역수의 의미를 이해하는 데 효과적이지 않다는 것을 알 수 있다.

둘째, 분수 나눗셈 알고리즘에서 분수 나눗셈이 곱셈으로 변환되는 과정에 대해 수학영재학생 36명 중 18명(50%)만이 설명할 수 있었으며, 그 중 제수의 역수가 가지는 의미를 설명한 학생은 2명뿐이었고, 2명 모두 등분제 맥락에서 설명하였다. 이를 통해 학생들이 분수 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 알고리즘에 대한 이해가 부족함을 알 수 있으며, 등분제 맥락의 분수 나눗셈 상황 제시는 분수 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 연산에 대한 학생의 이해를 도울 수 있는 상황임을 알 수 있다. 따라서 '제수의 역수를 곱한다'는 알고리즘의 유의미한 이해를 위해 등분제 맥락의 문제 상황 제시를 통해 분수 나눗셈 알고리즘을 유도한다면 학생들도 알고리즘의 이해를 통한 형식화에 도달할 수 있을 것으로 생각된다.

셋째, 분수 나눗셈의 의미 이해와 알고리즘의 기술과 관련하여서는 학생들이 가장 많이 제시한 상황이 포함제 상황이었고, 이로 인해 통분을 통해 분수 나눗셈을 자연수의 나눗셈으로 환원하여 몫을 구하였으나, 이 과정에서 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 설명하지 못했다는 것이다. 그리하여 몫을 구하는 것과는 별개로 분수 알고리즘에서 제수의 역수를 곱하는 것을 대수적 전개 등을 통해 기술하였다. 이 또한 현행 교과서에 포함제 맥락의 분수 나눗셈 상황을 통해서만 분수 나눗셈을 배운 학생들에게는 제수의 역수를 곱하는 이유에 대한 이해가 어려움을 알 수 있다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 초등수학영재들의 분수 나눗셈 의미와 알고리즘의 이해에 대하여 실생활 관련 문제설정 및 풀이 과정을 통하여 분석하였다. 연구를 통해 나타난 결론은 다음과 같다.

첫째, 영재학생들이 제시한 분수 나눗셈 문제 상황은 포함제 맥락이 현격히 많았다. 이는 현행 6학년 교과서에서 분수의 나눗셈은 동수누감의 원리에 따른 포함제 맥락으로 접근하고 있음에 따라 학생들이 교과서에서 가장 많이 접한 포함제 문항이 가장 많은 것으로 보인다. 또한 학생들에게 제시한 문제는 몫이 분수가 되어, 이산량으로 만든 포함제 맥락의 문제는 해의 분수 표현이 적절하지 않음에도 불구하고 이산량을 소재로 한 문제가 많아, 교과서에서 포함제 맥락에서 문제를 제시할 때 이에 대한 고려가 필요함을 알 수 있다. 예비교사와 일반학생을 대상으로 한 선행연구에 비해 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역 맥락에서 더 다양한 상황이 제시되긴 했지만 수학영재학생들도 대부분이 포함제 맥락으로만 분수 나눗셈 문제를 만들었고, 등분제, 곱셈의 역, 카테시안 곱의 역 맥락에 대한 이해가 부족하였다.

둘째, 영재학생들 또한 분수 나눗셈 알고리즘에서 제수의 역수를 곱하는 과정과 제수의 역수의 의미에 대한 이해가 부족하였다. 분수 나눗셈 알고리즘에서 제수의 역수를 곱하는 과정을 설명한 학생은 18명(50%)이였으며, 그들 중 2명만이 제수의 역수의 의미를 설명할 수 있었고, 모두 등분제 맥락에서 설명하였다. 영재학생들이 분수 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 알고리즘에 대한 의미 있는 이해가 매우 부족함을 알 수 있으며, 이것은 교과서에서 분수 나눗셈이 포함제 맥락으로만 제시되고 있는 상황과 관련이 있음을 알 수 있다.

셋째, 영재학생 36명 중 18명(50%)만이 분수 나눗셈에 적합한 실생활 문제를 만들었고, 2문제 이상 만든 학생은 10명(26.3%)이었으며, 이들 모두가 동일한 분수 나눗셈의 상황으로 문제를 만들었다. 알고리즘을 설명하는 방법에서도 2가지 이상의 방법을 제시한 학생은 2명(5.6%)뿐임에 비추어 보았을 때, 영재학생들의 수학적 창의성이 기대 수준보다는 매우 낮았고, 실생활 관련 문제설정 능력도 부족함을 알 수 있었다. 이러한 상황을 볼 때, 초등수학교실에서 문제설정과 같은 교수 · 학습 방법이 별로 이루어지지 않고 있음을 짐작할 수 있다.

이상의 분석에서 수학영재학생들이 분수 나눗셈의 의미 이해와 분수 나눗셈에서 제수의 역수를 곱하는 알고리즘에 대한 이해가 부족함이 드러났다. 2009 개정 교육과정까지의 수학교과서에서는 앞에서 언급했듯이 분수 나눗셈 알고리즘에 대한 정당화 과정에서 제수의 역수를 곱하는 의미에 대해 학생들이 이해하는 것이 어려운 상황이다. 분수 나눗셈 알고리즘 학습은 계산 절차나 방법에 중점을 두기 보다는 원리의 이해를 통해 알고리즘을 이해해야 하지만, 학생들은 분수 나눗셈 알고리즘에 대한 이해보다는 단순히 '역수를 곱한다.'는 것을 기계적으로 문제 해결에 적용하게 될 가능성이 매우 높다. 이로 인해 학생들은 통분을 통해 분수 나눗셈을 자연수의 나눗셈으로 환원하여 계산하다 보니 그 과정에서 제수의 역수를 곱하는 알고리즘을 이해하는 데 어려움을 보이고 있다.

분석 결과를 토대로 초등수학 분수 나눗셈 지도와 관련하여 다음과 같은 제언을 한다. 첫째, 분수 나눗셈 연산의 의미를 보다 효과적으로 이해할 수 있도록 교과서에 분수 나눗셈의 다양한 문제 상황이 제시되어야 할 것이다. 2009 개정 교육과정에 따른 6학년 분수의 나눗셈 단원을 살펴보면 모두가 포함제 맥락의 문제이다. 교과서에 제시된 분수 나눗셈 상황이 학생들의 학습에 직접적인 영향을 미친다는 점에서 다양한 문제 상황을 교과서에 제시한다면 학생들의 분수 나눗셈 의미에 대한 이해뿐만 아니라 수학적 사고력 향상에 도움이 될 것이다.

둘째, 분수 나눗셈 알고리즘 도입에 대한 대안으로 제시된 등분제 맥락을 바탕으로 한 교수・학습 방법 도입이 고려되어야 한다. 등분제 맥락에서 알고리즘을 정당화한 경우, 1에 해당하는 것을 구하기 위해 제수의 역수를 곱하는 의미를 드러내어 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2}$의 알고리즘을 설명하였다. 등분제 맥락은 현행 교과서의 포함제 맥락에 견주어 볼 때 몫이 분수가 되는 분수 나눗셈의 경우에도 어색하지 않다는 점, 제수의 역수의 의미가 분명하게 된다는 점 등에서 상대적 장점이 있다(조용진 외, 2013). 이를 고려하여 등분제 맥락에서 분수 나눗셈 알고리즘을 도입한다면 제수의 역수를 곱하는 알고리즘에 대한 학생들의 이해를 돕는 데 도움이 될 것이라 사료된다.

셋째, 현실 맥락의 문제설정 활동은 수학적 개념뿐만 아니라 실생활에서 수학의 유용성에 대한 이해, 더 나아가서 수학적 창의성 계발을 위해 매우 유용한 한 가지 방법이다(Leung & Silver, 1997; Silver, 1997; Silver & Cai, 2005). 수학영재뿐만 아니라 일반학생들의 수학문제 해결 능력뿐만 아니라 수학적 창의성 계발을 위하여 실생활 문제설정에 기반한 교수・학습 방법도 수학교실에 적극 도입할 필요성이 있다.

본 연구는 수학영재선발의 2단계인 수업관찰에 포함된 한 과제에 대해 수학영재학생들이 작성한 탐구활동지를 분석한 것으로, 현실적 여건으로 말미암아 상당히 제한된 시간에 문제를 만들고 풀어야 했기 때문에, 학생들이 충분히 숙고하여 다양한 의미의 분수 나눗셈 문제를 제시하기 보다는 자신에게 익숙한 분수 나눗셈 문제를 제시했을 수 있다. 따라서 본 연구의 결과를 수학영재의 분수 나눗셈 이해와, 문제설정 및 풀이에서의 창의성으로 일반화하기에는 제한이 있다. 따라서 후속 연구에서는 가능한 한 충분한 시간을 확보하고 심층면담 등의 방법도 병행하여 분수 나눗셈 의미 이해와 알고리즘 이해에 대한 분석과 함께 문제설정 및 풀이 활동에서의 엄밀한 창의성 평가도 함께 실시될 필요가 있다.

참고문헌

[1] 교육부(2015). 교사용 지도서 수학 5-2.
[2] 교육부(2015). 교사용 지도서 수학 6-1.
[3] 강문봉 외 공역(1999). 초등수학학습의 이해. 양성원.
[4] 강문봉(2004). 분수 나눗셈 지도 방법에 대한 연구.대한수학교육학회, 25, 199-214.
[5] 강영란, 조정수, 김진환(2012). 분수 나눗셈의 문장제에 대한 초등 교사들의 전문화된 내용지식(SCK) 분석. 한국수학교육학회, 26(3), 301-316.
[6] 강흥규(2014). 초등수학에서 분수 나눗셈의 포함제와 등분제의 정의에 관한 교육적 고찰. 한국초등수학교육학회, 18(2), 319-339.
[7] 김경미, 황우형(2011). 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생의 이해와 문장제 해결의 관련성 분석. 한국수학교육학회, 50(3), 337-353.
[8] 김명운(2009). 맥락화를 통한 정수와 분수의 곱셈· 나눗셈 지도. 건국대학교 대학원박사학위논문.
[9] 박교식, 송상헌, 임재훈(2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 대한 연구. 학교수학, 6(3), 235-249.
[10] 방정숙, Li(2008). 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석. 한국수학교육학회, 47(3), 291-310.
[11] 방정숙, 이지영(2009). 사례 연구를 통한 분수 나눗셈의 연산 감각 분석. 학교수학, 11(1), 71-91.
[12] 서관석, 정경순(2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구-교사교육적 관점. 수학교육학연구, 10(1), 103-113.
[13] 신준식(2013). 문제 상황과 연결된 분수 나눗셈의 교과서 내용 구성 방안. 한국수학교육학회, 52(2), 217-230.
[14] 이용률(2001). 지도내용의 핵심과제 99. 서울: 경문사.
[15] 임재훈(2007). 카테시안 곱의 역 맥락에서 분수의 나눗셈. 학교수학, 9(1), 13-28.
[16] 임재훈, 김수미, 박교식(2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. 학교수학, 7(2), 103-121.
[17] 조용진, 홍갑주(2013). 분수 나눗셈 지도에서 단위비율 결정 맥락의 실제 적용을 위한 기초 연구. 한국수학교육학회, 16(2), 93-106.
[18] Leung, S. S. & Silver, E. A. (1997), The role of task format,

mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. Mathematics Education Research Journal 9(2), 5-24.
[19] Ma. L(2002). 초등학교 수학 이렇게 가르쳐라. 신형용· 승영조(역). 서울: 승산.
[20] Siebert, I.(2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), Making sense of fractions, ratios, and proportions(247-256). Reston, VA: NCTM.
[21] Silver, E. A. & Cai, J. (2005). Assessing Students' Mathematical: Problem posing. Teaching Children Mathematics, 12(3), 129-135. Reston, VA: NCTM.
[22] Silver, E. A. (1997). Fostering Creative through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. ZDM, 29(3), 75-80.
[23] Sinicrope, R., Mick, H. W, & Kolb, J. R.(2002). Interpretations of fraction division. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), Making sense of fractions, ratios, and proportions(153-161). Reston, VA: NCTM.

Kim, Young A
Busan Hyungok Elementary school
Pusan, 606-053 Korea

E-mail : duddk56@hanmail.net

Kim, Dong Hwa
Department of Mathematics Education
Pusan National University
Pusan, 46241 Korea
E-mail : dhgim@pusan.ac.kr

Noh, Ji Hwa
Department of Mathematics Education
Pusan National University
Pusan, 46241 Korea
E-mail : nohjihwa@gmail.com